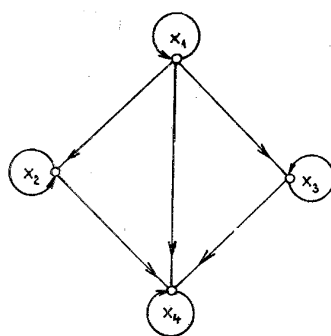


Využití násobení matic

V článku „O násobení matic“ byla zavedena spojovací interpretace násobení matic. V tomto článku popíšeme jedno její využití – **zjištění tranzitivity binární relace R definované v konečné množině M** (v našem případě v nepříliš početné množině).

Binární relace R je tranzitivní v množině M právě tehdy, když pro každé tři prvky x, y, z množiny M platí: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Řešme následující úlohu: Binární relace R je dána uzlovým grafem (viz obrázek).



Obr. 1

Dokažte, že tato relace je v množině $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ tranzitivní.

Čtenář by mohl formou cvičení vyřešit úlohu pomocí stromu logických možností. Pokusme se však vyřešit úlohu početně.

Relaci R přiřadíme čtvercovou matici $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,4}^{i=1,\dots,4}$ (počet řádků, resp. sloupců matice A se řídí počtem prvků množiny M) takto: Platí-li $x_i R x_k$ (jinak řečeno – existuje-li hrana $\overrightarrow{x_i x_k}$ v příslušném uzlovém grafu), pak položíme $a_{ik} = 1$. Neplatí-li $x_i R x_k$ (neboli – taková hrana $\overrightarrow{x_i x_k}$ neexistuje), pak položíme $a_{ik} = 0$.

Čtvercovou matici A, kterou získáme, nazýváme **incidenční matice relace R**.

Incidenční matice relace R z naší úlohy je tedy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abychom se mohli v dalším textu o uvažované situaci lépe vyjádřit, zavedme ještě jeden snadno srozumitelný pojem. Jestliže je dán uzlový graf binární relace R, můžeme vytvářet konečné posloupnosti uzlů a hran, v nichž je každá hrana zapsána vždy bezprostředně za uzlem, z něhož vychází, a bezprostředně před uzlem, do něhož vchází.

Např. podle výše uvedeného obrázku 1:

$$x_1, \overrightarrow{x_1 x_2}, x_2, \overrightarrow{x_2 x_4}, x_4 \quad \dots (1)$$

$$x_1, \overrightarrow{x_1 x_1}, x_1 \quad \dots (2)$$

$$x_1, \overrightarrow{x_1 x_3}, x_3, \overrightarrow{x_3 x_3}, x_3, \overrightarrow{x_3 x_4}, x_4 \quad \dots (3)$$

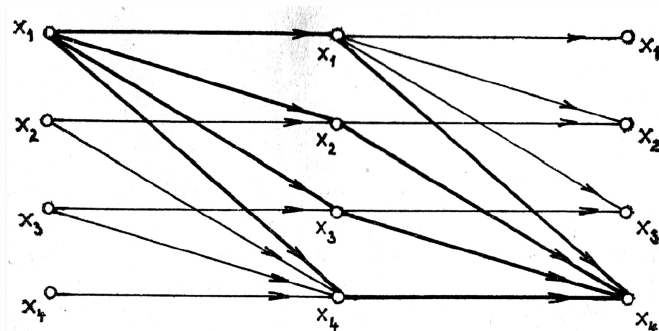
Takové posloupnosti nazýváme **orientovaná spojení**. Počet hran v orientovaném spojení nazveme **délkou orientovaného spojení**. (Délka orientovaných spojení označených (1), (2), (3) je tedy postupně 2, 1, 3).

Prvky matice A můžeme nyní chápat jako počty orientovaných spojení délky 1 mezi příslušnými dvěma uzly grafu relace R

Vypočteme dále matici $C = A \cdot A$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spojovací interpretace:



Obr. 2

Rozváží-li si nyní čtenář dobře princip spojovací interpretace při násobení matic a vezme-li v úvahu pojem orientovaného spojení, resp. délka orientovaného spojení, může prvky matice C chápat jako **počty orientovaných spojení délky 2** mezi příslušnými uzly grafu relace R.

Např.: $c_{14} = 4$; vypíšeme čtyři orientovaná spojení délky 2 mezi uzly x_1, x_4 . (Ve výše uvedeném obrázku 2 jsou tato spojení vyznačena silněji.)

1. $x_1, \overrightarrow{x_1 x_1}, x_1, \overrightarrow{x_1 x_4}, x_4$
2. $x_1, \overrightarrow{x_1 x_2}, x_2, \overrightarrow{x_2 x_4}, x_4$
3. $x_1, \overrightarrow{x_1 x_3}, x_3, \overrightarrow{x_3 x_4}, x_4$
4. $x_1, \overrightarrow{x_1 x_4}, x_4, \overrightarrow{x_4 x_4}, x_4$

Zjištění orientovaných spojení pro další prvky matice C je snadné, přenecháváme je čtenáři jako cvičení.

V původní úloze jsme si však vytkli jiný cíl než zkoumat orientovaná spojení. Přesto nám však tento pohled na orientovaná spojení dobře poslouží. Pro početní zjištění tranzitivity relace je důležitá existence orientovaných spojení délky 2; počet spojení pro toto zkoumání podstatný není.

Je-li prvek c_{ij} matice C nenulový, pak existuje v uzlovém grafu relace R orientované spojení délky 2 mezi uzly x_i, x_j (neboli existuje uzel x_k tak, že $x_i R x_k$ a zároveň $x_k R x_j$). Aby nyní relace R

byla tranzitivní, musí být „stejnolehlý“ prvek a_{ij} matice A roven 1 (neboli musí platit $x_i R x_j$). Prozkoumáme-li v tomto smyslu všechny prvky matic C a A , zjistíme, že relace R daná uzlovým grafem (Obr. 1) je v množině $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ tranzitivní.

Zformulujme závěrem podstatu řešení našeho problému:

Nechť R je binární relace definovaná v konečné množině $M = \{x_1, \dots, x_n\}$. Incidenční matici relace R označme $A = (a_{ij})_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n}$, dále označme matici $C = (c_{ij})_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n} = A \cdot A$. Jestliže pro libovolné indexy i, j platí $c_{ij} \neq 0 \Rightarrow a_{ij} = 1$, pak binární relace R je v množině M tranzitivní.

Tato metoda zjištění tranzitivity relace je vhodná zejména k důkazům, že binární relace R je relací uspořádání konečné množiny. (Tranzitivita v těchto případech hraje důležitou roli.)